INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES FONCTIONNAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1974. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

R désigne le corps des nombres réels et E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur **R**.

I

1° Soit $a > 0$, $f \in E$, $x \in \mathbf{R}$. On pose

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(u)\,du.$$

Montrer que F ainsi définie sur **R** appartient à E et possède une dérivée continue. Calculer F dans les deux cas suivants.

$$f(x) = \alpha x + \beta : \qquad f(x) = \cos \lambda x .$$

Dans la suite du problème on note T_a l'application de E dans E qui associe F à f. On emploiera donc les notations

$$T_a.f \text{ pour } F \qquad \text{et} \qquad T_a.f(x) \text{ pour } F(x) .$$

2° Vérifier que T_a est une application linéaire. Est-elle injective? Est-elle surjective? Montrer que si f est bornée, $T_a.f$ l'est également et que

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |T_a.f(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$$

3° Soit $f \in E$ paire et décroissante sur $(0, \infty)$. Montrer que $T_a.f$ a les mêmes propriétés.

4° Soit $A > 0$ et $f \in E$ telle que

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad |x| > A$$

Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que

$$T_a.f(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad |x| > B$$

et

$$\int_{-B}^{+B} T_a.f(x)\,dx = \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx .$$

II

On désigne par H l'ensemble des fonctions bornées de E pour lesquelles existe

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{+t} f(u)\,du$$

et on note $\mu(f)$ cette limite.

1° Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et μ une forme linéaire sur H. Montrer que le sous-espace vectoriel des fonctions constantes est un supplémentaire du noyau H_0 de μ dans H.

2° Soit $f \in H$; montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(u)\,du = \mu(f) .$$

3° Soit $f \in E$ possédant des limites pour $x \to \pm\infty$. Montrer que f appartient à H et calculer $\mu(f)$ en fonction de ces limites.

4° Soit $f \in H$ et $a > 0$; montrer que $T_a.f$ appartient à H et

$$\mu[T_a.f] = \mu(f)$$

III

Soit (a_n) une suite de nombres strictement positifs. Pour tout $f \in E$, on utilisera les notations

$$f^{(1)} = T_{a_1} f \; ; \quad \ldots \; ; \; f^{(n)} = T_{a_n} f^{(n-1)} \qquad (n \geqslant 2)$$

1° Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$\theta(x) = \int_0^{\pi} (1-t) \cos xt \, dt$$

Calculer $\theta(x)$. En déduire que θ est positive et appartient à E.

2° Montrer pour $n \geqslant 1$ la formule

$$\theta^{(n)}(x) = \int_0^{\pi} (1-t)\, \Phi_n(t) \cos xt \, dt$$

où $$\Phi_n(t) = \frac{\sin a_1 t}{a_1 t} \cdot \frac{\sin a_2 t}{a_2 t} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin a_n t}{a_n t}$$

3° On suppose que la série de terme général a^2_n est divergente et que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$a_n \leqslant \pi$$

Montrer que Φ_n est alors une fonction positive décroissante sur [0, 1] et que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Log} [\Phi_n(\varepsilon)] = -\infty$$

En déduire pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \theta^{(n)}(x) = 0$$

4° Soit $A > 0$ et $f \in E$ telle que

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad |x| > A \; .$$

Montrer que si les hypothèses de 3° sont vérifiées, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = 0$$

L'hypothèse $a_n \leqslant \pi$ est-elle essentielle?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail